DIMOSTRAZIONI
e
PSEUDODIMOSTRAZIONI

Mariano Spadaccini   mariano at marianospadaccini.it

29 luglio 2009 – Versione 1.3.0

Nessuna umana investigazione si può
dimandare vera scienza, se essa non
passa per le matematiche dimostrazioni.
Leonardo da Vinci

Copyright

Questo documento

In questo documento ho voluto riportare alcune dimostrazioni a cui assegno o ho assegnato una particolare rilevanza intellettuale rispetto alle altre dimostrazioni che ho affrontato durante i miei studi, nella speranza che possano stimolare l'interesse e la curiosità di eventuali lettori.
Invito gli stessi ad inviarmi commenti o eventuali correzioni presso l'indirizzo email riportato in copertina.

Ringraziamenti

Ringrazio me medesimo.

Storico

Di seguito sono riportate la versione corrente e le precedenti versioni di questo documento con le segnalazione delle relative modifiche e/o aggiunte.

1.0.0 23/1/2004 - Nascita di questo documento; le sezioni della pagina 5, 7, 23 e 27 erano parte integrante di un altro documento.

1.0.1 28/2/2004 - Modificata la sezione della pagina 23 ed apportate correzioni minori.

1.1.0 2/3/2004 - Aggiunta le sezione a pagina 11.

1.2.0 27/5/2008 - Aggiunte le sezioni delle pagine 13 e 15; apportate correzioni minori.

1.3.0 29/7/2009 - Aggiunta la sezione a pagina 17; apportate correzioni minori.

Indice

Parte I

Dimostrazioni

Calcolo di $\sum z^i$

Teorema 1

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1 - z^n}{1 - z} \qquad \textit{con } |z| < 1$$

Dimostrazione 1.1 *Sia*

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \qquad \textit{con } |z| < 1; \tag{1}$$

moltiplicando entrambi i membri per z si ottiene:

$$z \sum_{i=0}^{n} z^i = z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^{n+1} \qquad \textit{con } |z| < 1; \tag{2}$$

sottraendo membro a membro la (1) da (2) otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} z^i - z \sum_{i=0}^{n} z^i &= 1 - z^{n+1} \\ (1 - z) \sum_{i=0}^{n} z^i &= 1 - z^{n+1} \\ \sum_{i=0}^{n} z^i &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \end{aligned}$$

ripetendo che abbiamo imposto $|z| < 1$.

$0,\bar{9}=1$

Anni fa (frequentavo il secondo anno dell'ITCP di Chieti Scalo) stavo completando un esercizio di matematica, in particolare trasformavo il numero $8,\bar{9}$ nel corrispondente frazionario. Mi ricordavo benissimo l'algorimo per la trasformazione dei numeri razionali in frazioni[1] e, senza indugio, ho proseguito nei semplici calcoli che di seguito riporto:

$$8,\bar{9} = \frac{89-8}{9} = \frac{81}{9}$$

e soddisfatto per la conclusione dell'esercizio non feci subito caso ad una grande scoperta[2], la quale monopolizzò la mia attenzione pochi minuti dopo:

$$8,\bar{9} = \frac{81}{9},$$

e poiché

$$\frac{81}{9} = 9,$$

si ha

$$8,\bar{9} = 9.$$

La questione mi colpì profondamente, ma la risolsi pensando che $8,\bar{9}$ è formato da talmente tante cifre[3] 9 dopo la virgola da non poter distinguersi dal numero 9; difatti, se fossimo riusciti a scrivere la differenza, significava che non avevamo considerato sufficienti cifre 9 dopo la virgola; scherzosamente ho scritto

$$9 - 8,\bar{9} = 0,\bar{0}1.$$

[1] si veda la sezione A.1

[2] la reputo tale poiché per me lo è stata

[3] in effetti, scrivere *talmente tante cifre* significa che le cifre sono tante, ma in numero finito; dovrei quindi scrivere *infinite cifre*

Anche se ho analizzato un caso particolare (quello che mi è capitato), la questione può essere riportata al caso generale:

$$n + 0{,}\bar{9} = n + 1$$

e sottraendo n ad ambo i mebri si ottiene:

$$0{,}\bar{9} = 1.$$

Anche se non ho affrontato la questione in maniera rigorosa[4], mi sono ritenuto soddisfatto sino al quinto anno.
Il triennio è stato un continuo fioccare di formule, spesso non dimostrate; ritenevo la più *bella* di tutte, la seguente:

$$\sum_{i=0}^{n} z_i = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad \text{con } |z| < 1,$$

di cui il libro adottato riportava la semplice ma geniale dimostrazione[5].
Se $n \to \infty$, la precedente formula può essere riscritta nel seguente modo:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} z_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad \text{con } |z| < 1,$$

o, equivalentemente:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i = \frac{1}{1 - z} \qquad \text{con } |z| < 1.$$

Attraverso questa semplice formula si può dimostrare formalmente la precedente identità:

Teorema 2 $0, \bar{9} = 1$

[4] qualcuno mi suggerisce matematicamente
[5] la riporto nella sezione mostrata alla pagina 5

Dimostrazione 2.1

$$\begin{aligned}
0,\bar{9} &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots\ = \\
&= 0,9(1 + 0,1 + 0,01 + \dots) = \\
&= 0,9(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots) = \\
&= 0,9 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \\
&= 0,9 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \\
&= 0,9 \frac{10}{9} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

La soddisfazione di comprendere che non ci sono differenze tra $0,\bar{9}$ e 1 è stata grande, ma è divenuta ancora maggiore quando, al terzo anno di università, ho scoperto che il mio professore di *Analisi II* dimostrava questa identità agli studenti ai precorsi di *Analisi (Analisi 0)*.

Teorema di Pitagora

Esistono tante dimostrazioni del teorema di Pitagora, ma tra tutte preferisco la seguente dimostrazione geometrica/algebrica.

Teorema 3 *Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettandolo ha area uguale alla somma delle aree dei quadrati costruti sui suoi cateti.*

Dimostrazione 3.1 *Si considerano quattro triangoli rettangoli uguali, ognuno di cateti a e b e ipotenusa c. L'accostamento dei triangoli come in Figura 1 forma un quadrato piccolo internamente, e un quadrato[6] avente come lato le ipotenuse dei triangoli. Evidentemente, l'area di ogni triangolo è $\frac{ab}{2}$, e l'area del quadrato*

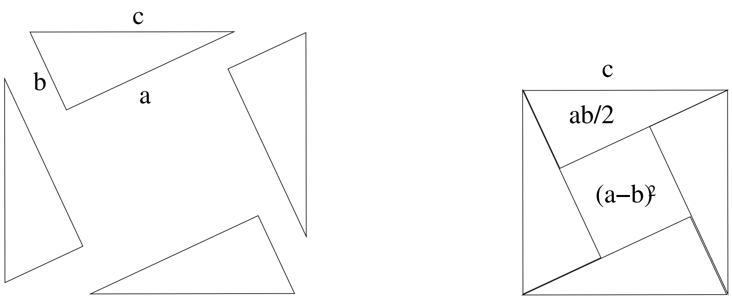

Figura 1: La Figura evidenzia una dimostrazione del teorema di Pitagora

grande è c^2.
Ma quest'area è uguale alla somma delle aree del quadrato interno $(a-b)^2$, e dei quattro triangoli che misurano insieme $4(ab/2)$, quindi:

$$\begin{aligned} c^2 = & \quad (a-b)^2 + 4(ab/2) = \\ = & \quad a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = \\ = & \quad a^2 + b^2 \end{aligned}$$

[6]è un quadrato poiché la somma dei due angoli non retti di un triangolo rettangolo forma un angolo retto

Esistono infiniti numeri primi

Tale dimostrazione è dovuta ad Euclide.

Teorema 4 *L'insieme dei numeri primi è infinito.*

Ipotesi (per assurdo) 4.1 *L'insieme dei numeri primi è finito.*

Dimostrazione 4.1 *Ci sarà un numero P primo maggiore di tutti gli altri. Sia Q un numero uguale al prodotto di tutti i numeri primi (da 2 a P compresi) più 1.*

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P + 1$$

Poiché $Q > P$ e P è il numero primo più grande, Q dev'essere divisibile per almeno un numero primo oltre che per se stesso e per 1.
Ma per come è stato costruito, diviso per uno qualunque dei suoi fattori darà come risultato i restanti fattori con il resto di 1. Né puo essere divisibile per un numero primo maggiore di P poichè la sua esistenza è esclusa a priori (per la deduzione iniziale).

L'incommensurabilità

Di seguito si esplicherà il concetto di incommensurabilità con l'introduzione dei numeri irrazionali.
Si esamini il quadrato mostrato in Figura 2, in cui la lunghezza del lato è unitaria. Per calcolare la lunghezza della diagonale è possibile applicare il teorema di

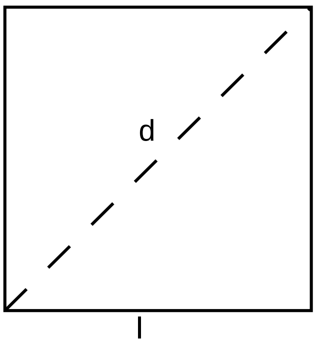

Figura 2: Quadrato: si supponda di lato unitario e, quindi, diagonale $\sqrt{2}$

pitagora

$$\begin{aligned} d^2 = &\quad 1^2 + 1^2 \\ d = &\quad \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pertanto il rapporto tra diagonale e lato è $\sqrt{2}$.
Si voglia dimostrare che $\sqrt{2}$ non può essere espresso sotto forma di rapporto tra numeri interi (numero *irrazionale*).

Ipotesi (per assurdo) 4.2 *Si ipotizzi che* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

Dimostrazione 4.2 *Nel caso* a *e* b *avessero fattori comuni, si semplificherebbe la frazione ottentendo* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *con* p *e* q *primi tra loro.*

Ovviamente p e q non possono essere entrambi pari (se lo fossero conterrebbero entrambi il fattore 2).
Elevando i due membri al quadrato otteniamo

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$
$$p^2 = 2q^2$$

Si noti che il membro di destra è pari; poichè p^2 è uguale ad un numero pari, anche p sarà pari[7]*.*
Poiché p e q non hanno fattori comuni, q non può essere pari, quindi è dispari. Essendo p pari, può essere scritto nella forma $2r$; quindi:

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \\ (2r)^2 &= 2q^2 \\ 4r^2 &= 2q^2 \\ 2r^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Perciò q^2 è anch'esso un numero pari, quindi lo è anche q, in contrasto con quanto dedotto precedentemente.

Tale dimostrazione conduce al capostipite di un nuovo genere di numeri detti *irrazionali*.
P.S. in maniera simile si domostra che la radice quadrata di un qualunque numero che non sia un quadrato perfetto è un numero irrazionale.
N.B. si deduce facilmente che i *numeri irrazionali* sono infinitamente maggiori dei *numeri razionali*.

[7] se il quadrato di un numero è pari, dev'esserlo anche il numero originario

Calcolo di $\int \sin^2 x dx$

Si voglia calcolare:

$$\int \sin^2 x dx$$

Di seguito si mostreranno alcune alternative per il calcolo.

Duplicazione

$$\int \sin^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx = \int dx - \int \cos^2 x dx$$

Dalle formule di duplicazione si ha:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

quindi

$$\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$$

per cui

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= x - \int (\cos 2x + \sin^2 x) dx = \\ &= x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \sin^2 x dx \end{aligned}$$

e passando l'integrale del secondo membro al primo

$$2 \int \sin^2 x dx = x - \frac{\sin 2x}{2}$$

quindi

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + k$$

Per parti

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x \qquad = -\sin x \cos x + \int \cos x \cos x dx =$$
$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

Ricordando che

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

e che

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

sostituendo

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

e torniamo al caso precedente.

Bisezione

Ricordando che

$$\sin^2 x = -\frac{1 - \cos 2x}{2}$$

sostituendo

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + k$$

Modo euleriano

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx = -\frac{1}{4} \int e^{2ix} - e^0 + e^{-2ix} dx = \\
&= -\frac{1}{4} \int e^{2ix} dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int e^{-2ix} dx = \\
&= -\frac{1}{4} \frac{e^{2ix}}{2i} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \frac{e^{-2ix}}{2i} + k = \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{8i} (\cos 2x + i \sin 2x) + \frac{1}{8i} (\cos 2x - i \sin 2x) + k = \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{8i} 2i \sin 2x + k = \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + k
\end{aligned}$$

Parte II

Pseudodimostrazioni

2+2 può anche fare 3

Anni fa (frequentavo il quinto anno dell'ITCP di Chieti Scalo) ho proposto uno PSEUDOTEOREMA, con due relative dimostrazioni[8], per il `Giornalino` della scuola, ma sin da subito non ha raccolto simpatie, ma è stato bloccato dal caporedattore (uno studente) per la sua blasfemità.
Ho deciso di riproporlo, con la speranza di produrre qualche sorriso.

PseudoTeorema 1 *2+2 può anche fare 3*

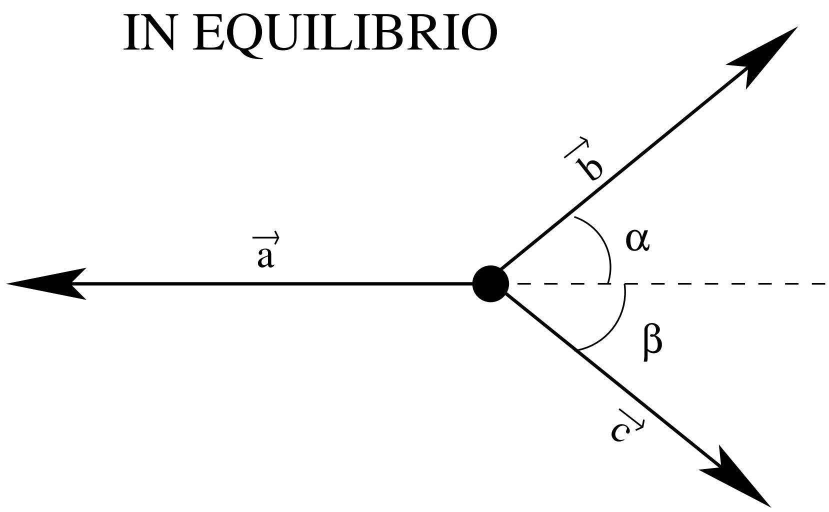

Figura 3: Poiché il sistema è in equilibrio, la risultante delle tre forze $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ è nulla

[8] in realtà, le dimostrazioni erano tre, però una di esse era volutamente errata con un piccolo errore non riscontrabile da un occhio poco attento

PseudoDimostrazione 4.1 *Dalla Figura 3 si evince questa relazione:*

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

e l'uguaglianza tra i moduli:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b} + \vec{c}| \\ &= cos\alpha|\vec{b}| + cos\beta|\vec{c}|. \end{aligned}$$

Poiché mi piacciono le simmetrie, impongo $\alpha = \beta$ e con semplici passaggi determino α tale che sia soddisfatta la precedente uguaglianza:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= cos\alpha|\vec{b}| + cos\alpha|\vec{c}| \\ |\vec{a}| &= cos\alpha(|\vec{b}| + |\vec{c}|) \\ \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|} &= cos\alpha \qquad\qquad se \quad |\vec{b}| + |\vec{c}| \neq 0. \end{aligned}$$

Imponendo i valori numerici che mi sono proposto:

$$|\vec{a}| = 3 \qquad |\vec{b}| = 2 \qquad |\vec{c}| = 2$$

si determina il valore di α tale che il sistema sia in equilibrio:

$$\frac{3}{2+2} = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{3}{4}.$$

PseudoDimostrazione 4.2 *Sappiamo dalla teoria della relatività, che esiste un coefficiente di* **dilatazione temporale** *γ definito nel modo seguente:*

$$\gamma = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

in cui[9] $c \cong 300.000$ *km/s e v è la velocità dell'oggetto.*
Nella Figura 4 è mostrato un viaggio interstellare effettuato dal punto P al punto A e ritorno, viaggio percorso alla velocità v, di durata 4 anni per un osservatore posto nel punto P sulla Terra[10]*; vogliamo determinare il valore di v affinché risulti che il viaggio per l'osseratore nella navicella duri 3 anni.*

[9] precisamente $c = 299.792.458$ m/s
[10] trascuriamo gli effetti relativistici sulla Terra, poiché, in effetti, essi sono trascurabili

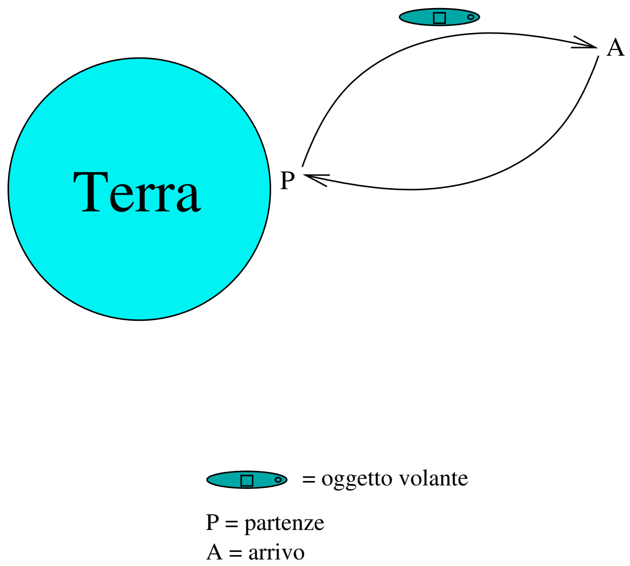

Figura 4: La figura mostra il viaggio di un oggetto dal punto di partenza P al punto di arrivo A

Con semplici calcoli, possiamo imporre che il coefficiente di dilatazione temporale sia:

$$\gamma = \frac{D_{ogg}}{D_{Terra}} = \frac{3}{4},$$

con $D_{ogg} = 3$ *giorni e* $D_{Terra} = 4$ *giorni, quindi di ha*

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{c^2} &= \frac{1}{4} \\
v^2 &= \frac{c^2}{4} \\
|v| &= \sqrt{\frac{c^2}{4}} \\
&= \frac{c}{2}
\end{aligned}$$

cioè una velocità approssimativamente uguale a 150.000 km/s.

Appendice A

Complementi

A.1 Esprimere numeri razionali in frazioni

I numeri razionali, a differenza dei numeri irrazionali, possiamo rappresentarli attraverso frazioni in cui sia il numeratore sia il denominatore sono numeri interi.
In generale, consideriamo il numero a,b$\bar{\text{c}}$, in cui a, b e c sono numeri interi qualsiasi, con c non nullo[1], {b} sia il numero composto solo da cifre 0 quante sono le cifre di b, {c} sia il numero composto solo da cifre 9 quante sono le cifre di c.
L'equivalente frazionario di a,b$\bar{\text{c}}$ è:

$$a, b\bar{\text{c}} = \frac{abc - ab}{\{c\}\{b\}},$$

in cui {c}{b} rappresenta il numero composto dall'accostamento di {c} e {b} nell'ordine indicato.
Per esemplificare quanto scritto, riporto alcuni insulsi esempi.

`Esempio 1` Ø significa *niente*, *vuoto*

$$1, \bar{1} \rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 1 & \\ b = \emptyset & \{b\} = \emptyset \\ c = 1 & \{c\} = 9 \end{array}$$

$$1, \bar{1} = \frac{11 - 1}{9} = \frac{10}{9}$$

[1] se c fosse nullo sarebbe banale la trattazione

`Esempio 2`

$$2,1\bar{5} \rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 2 & \\ b = 1 & \{b\} = 0 \\ c = 5 & \{c\} = 9 \end{array}$$

$$2,1\bar{5} = \frac{215 - 21}{90} = \frac{194}{90} = \frac{97}{45}$$

`Esempio 3`

$$0,\bar{8} \rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 0 & \\ b = \emptyset & \{b\} = \emptyset \\ c = 8 & \{c\} = 9 \end{array}$$

$$0,\bar{8} = \frac{088 - 08}{90} = \frac{80}{90} = \frac{8}{9}$$

`Esempio 4`[2]

$$0,8\bar{8} \rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 0 & \\ b = 8 & \{b\} = 0 \\ c = 8 & \{c\} = 9 \end{array}$$

$$0,\bar{8} = \frac{088 - 08}{90} = \frac{80}{90} = \frac{8}{9}$$

[2] ancora più insignificante degli altri