Università degli studi di L'Aquila

Esercitazioni

di

Modellistica e Simulazione

Riccardo Carducci   Giampiero Del Re
Mariano Spadaccini

20 febbraio 2004

Copyright

Introduzione

Questo documento è parte integrante dell'esame di *Modellistica e Simulazione*, del corso di laurea di *Ingegneria Elettronica v.o.* della facoltà di Ingegneria de L'Aquila presso Monteluco di Roio, prodotto nell'a.a. 2003-2004.

Esercitazione n° 0

Testo del problema

È di uso comune pensare che utilizzare il cosiddetto metodo del *raddoppio* sia una soluzione ottima per molti giochi[1]. Analizza il problema più a fondo.

Formulazione alternativa

Suppongo che il giocatore disponga di un `portafoglio iniziala` pari a 0 €, la sua `puntata iniziale` sia pari a 1 € e la intaschi se vince, la raddoppi se perde; ci si pone nel caso semplificativo di poter attingere, in caso di necessità, ad una riserva monetaria $\rightarrow \infty$.

Conclusioni

L'andamento qualititativo mostrato in Figura 1 mostra un tipico andamento del portafoglio di un soggetto che esegua 1000 giocate consecutive; dalla simulazione ripetuta più volte dall'elaboratore, il portafoglio spesso si accosta al dato teorico $\frac{n^\circ giocate}{2}$, cioè per 1000 giocate spesso il portafoglio si accosta attorno ai 500 €.

L'osservazione più importante, però, è l'importo massimo puntato, che nel caso mostrato in Figura 1 risulta essere `Max puntata 256€`, che equivalgono a 2^8€, che indicano semplicemente 8 sconfitte consecutive; nel caso mostrato in Figura 2 risulta essere `Max puntata 2048€`, che equivalgono a 2^{11}€, che indicano 11 sconfitte consecutive.

Questa osservazione ci porta a concludere che tramite il metodo del raddoppio ipoteticamente si potrebbe vincere in ogni caso nel lungo periodo, però è necessario ricorrere ad una ipotesi sempre disattesa nel caso reale, cioè che

[1]quali, ad esempio, i moderni *Lotto* e *Superenalotto*, ma anche il più vecchio *testa o croce*

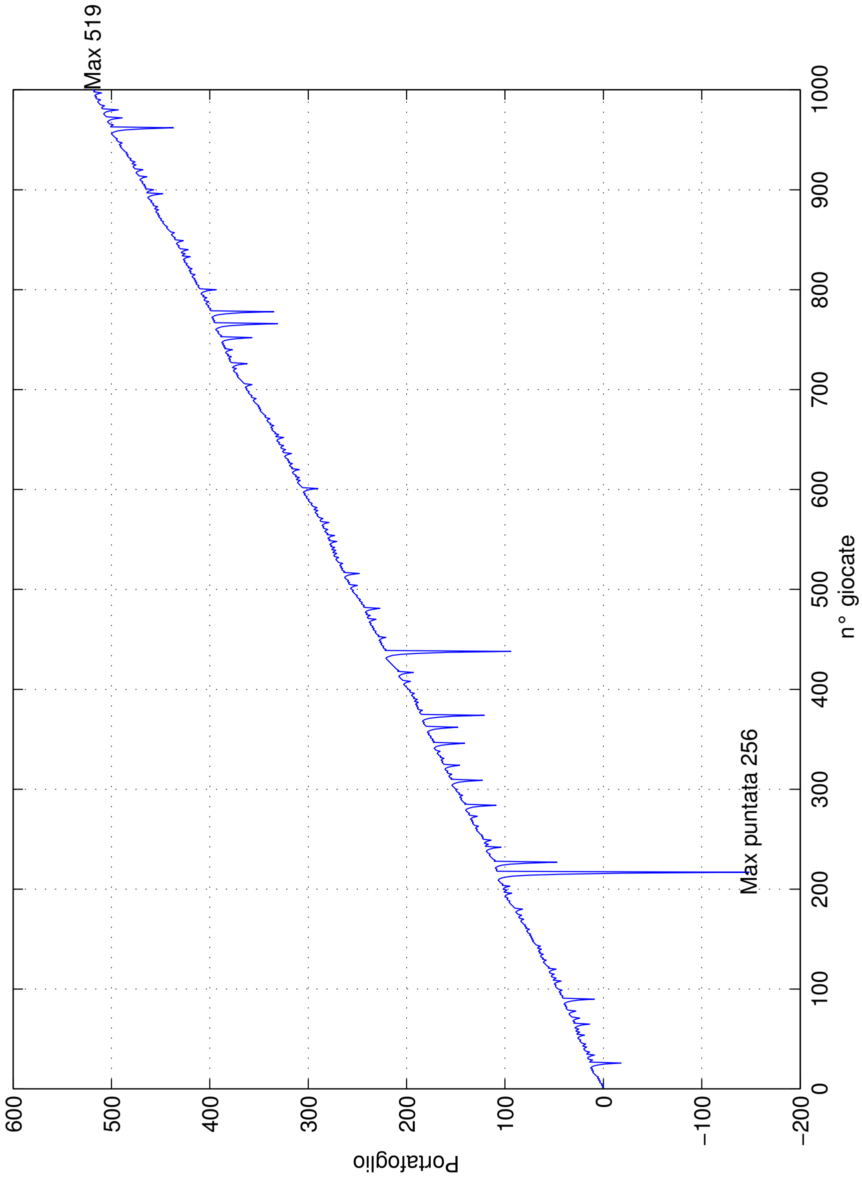


Figura 1: 1000 giocate, Vincita 519€, Max puntata 256€

si potrebbe attingere ad una riserva consistente, tendente ad una quantità tendenzialmente sempre maggiore per un numero crescente di giocate.

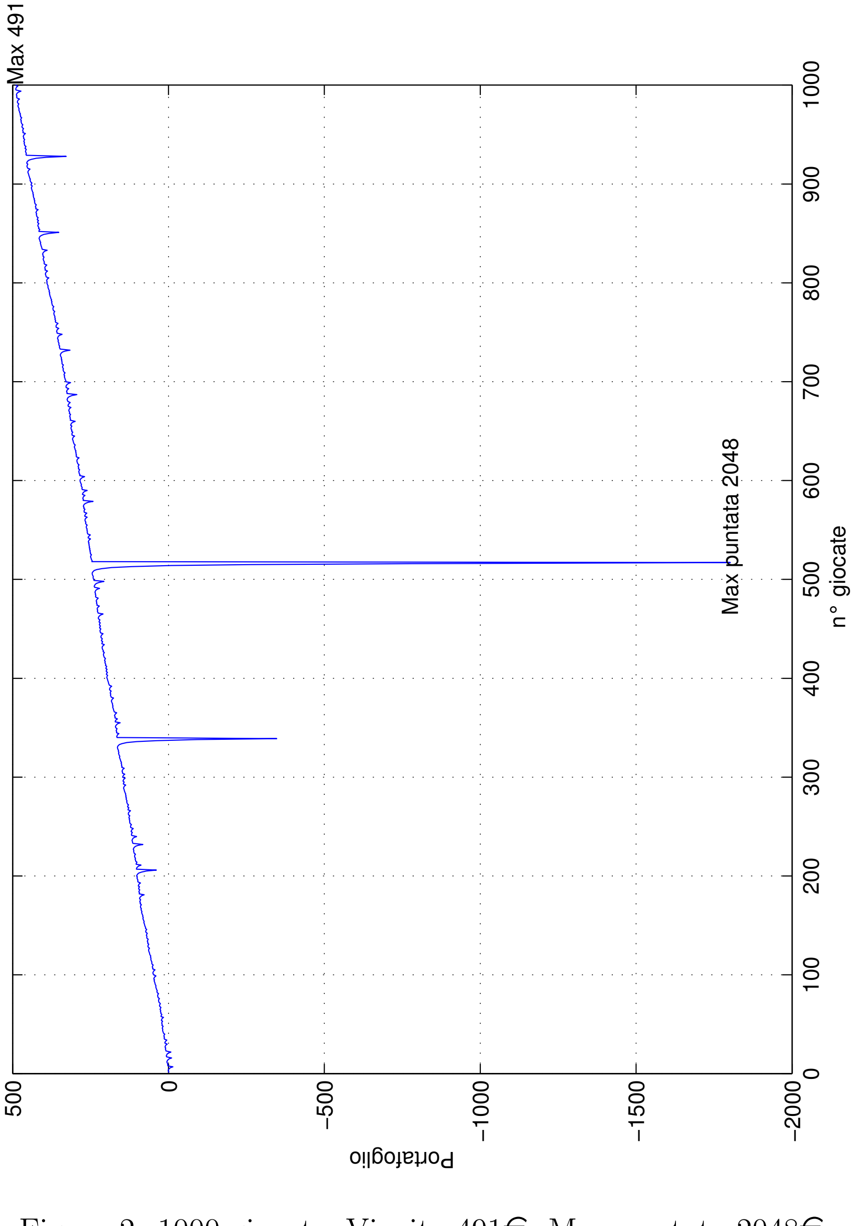


Figura 2: 1000 giocate, Vincita 491€, Max puntata 2048€

Esercitazione n° 1

Testo del problema

Ci sono due riferimenti R_1 ed R_2 che viaggiano lungo il verso positivo dell'asse delle ascisse del piano cartesiano xy. I due riferimenti svolgono delle misure successive della posizione di un oggetto in aria mentre sono in movimento. Le modalità della dinamica dei due riferimenti e le posizioni reali dell'oggetto in aria sono elencate nella seguente tabella:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_1	0	5	10	15	20	25	25	20	15	10	5
v_2	0	6	12	18	24	26	30	35	35	35	35
α_1	45	50	52	55	57	60	70	80	81	83	85
α_2	45	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
d_1	100	100	100	90	90	100	100	100	100	100	100
d_2	100	100	100	90	90	100	100	100	100	100	100

Conclusioni

Mettendo il sistema in forma marciale, abbiamo che può essere rappresentato istante per istante da un sistema 2x2 nella forma seguente:

$$\begin{cases} AX = b \\ \text{rango(A) pieno, cioè } n < m \end{cases}$$

Introduciamo ad ogni istante le nuove osservazioni:

$$\begin{cases} A = A_t = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_t^T \end{bmatrix} \\ b = b_t = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_t^T \end{bmatrix} \end{cases}$$

ciascuna riga ha il significato temporale di una nuova osservazione relativa al tempo t rango(A_t)=n¡t, cioè abbiamo un numero di osservazioni almeno pari al numero dei parametri del problema

In particolare nel nostro caso le matrici assumono la forma:

$$\begin{cases} a_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ b_t = \begin{bmatrix} R_i(t) + d_i(t)cos(alfa_i(t)) \\ d_i(t) + sin(alfa_i(t)) \end{bmatrix} \end{cases}$$

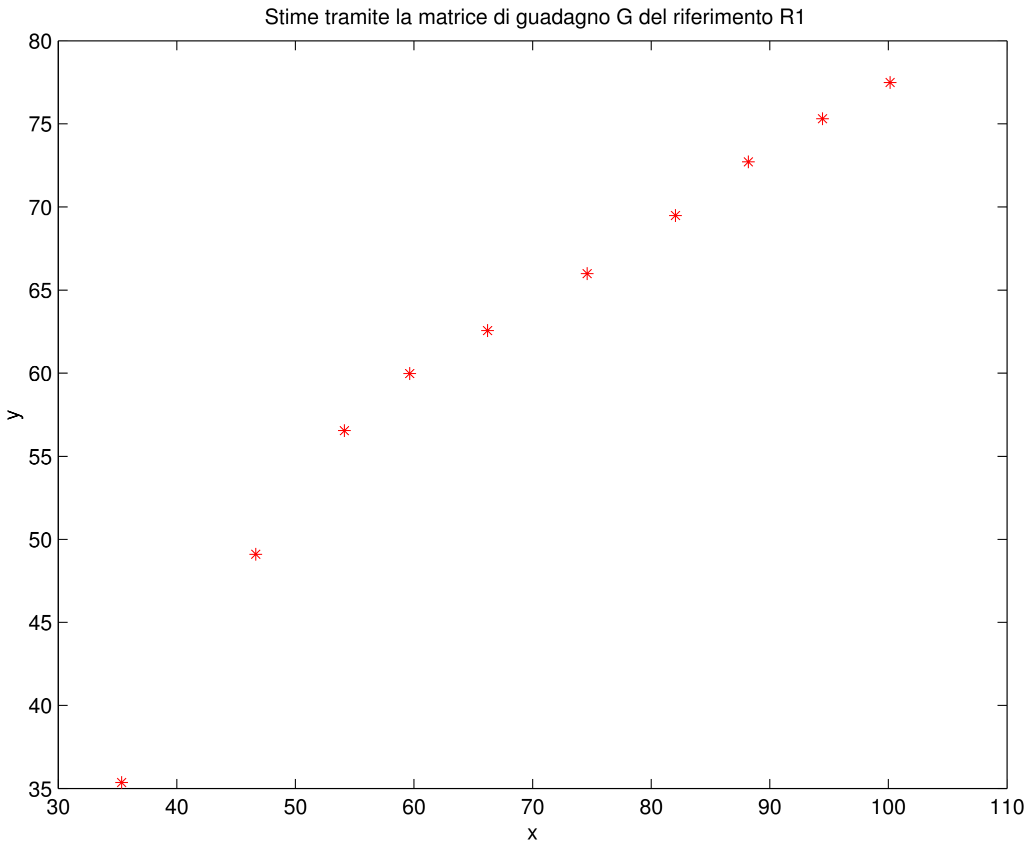
dove R(t) non è altro che la posizione dei riferimenti R_1 ed R_2 sull'asse delle ascisse durante l'evoluzione del sistema, mentre i due riferimenti si muovono. Per la stima delle coordinate abbiamo usato l'algoritmo ricorrente dei minimi quadrati, che ci permette appunto di avere le stime successive ad un istante temporale t tramite la matrice di guadagno G, che ricalcalo ad ogni istante successivo a t, osserviamo che per ciò che riguarda la prima stima:

$$G = \left[A_t^T A_t\right]^{-1}$$

Eseguendo uno script `Matlab` otteniamo i risultati riassunti in Tabella 1 e in Tabella 2.

punti	x	y
P_1	35.3553	35.3553
P_2	46.6631	49.1050
P_3	54.1389	56.5290
P_4	59.6355	59.9680
P_5	66.1992	62.5534
P_6	74.5993	65.9890
P_7	82.0496	69.4865
P_8	88.1958	72.7081
P_9	94.4405	75.3142
P_{10}	100.1447	77.4906

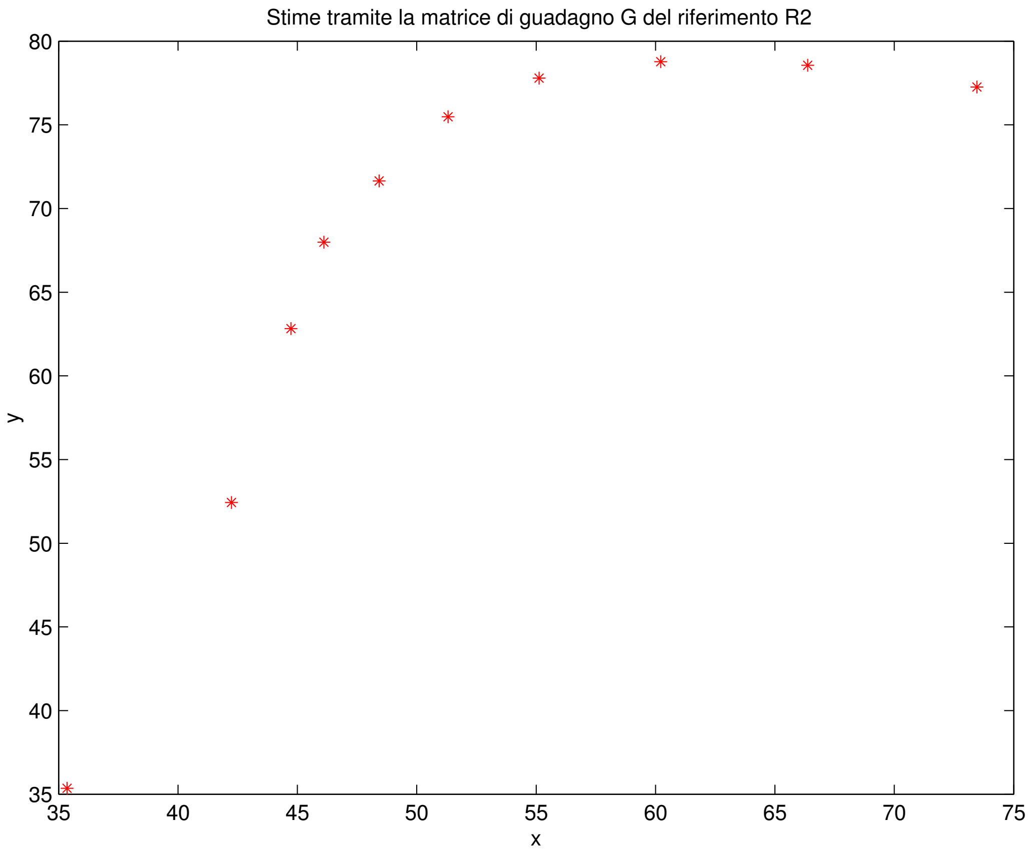
Tabella 1: stime dal punto R_1



Dai tre grafici più che dalle tabelle si evince che l'algoritmo non porta ad una convergenza delle stime per valori sempre crescenti del tempo, inoltre il problema non è parallelizzabile, cioè non possiamo stimare la posizione di un

punti	x	y
P_1	35.3553	35.3553
P_2	42.2369	52.4377
P_3	44.7282	62.8206
P_4	46.1082	67.9830
P_5	48.4235	71.6525
P_6	51.3109	75.4851
P_7	55.1218	77.7957
P_8	60.2194	78.7742
P_9	66.3695	78.5572
P_{10}	73.4628	77.2592

Tabella 2: stime dal punto R_2



punto da due riferimenti in movimento. Infatti, dalle simulazioni effettuate il `Matlab`, a seconda che si stimi dal primo o dal secondo riferimento, otteniamo coordinate per l'oggetto in aria che, nello stesso istante di tempo, sono differenti tra loro. Se vogliamo le stime dal primo riferimento consideriamo la Tabella1 e relativo grafico, altrimenti la Tabella2 se considero il secondo riferimento.

Esercitazione n$^\circ$ 2

Testo del problema

Sia data la seguente tabella in cui sono assegnate le ore settimanali:

corso	**ore settimanali**
Modellistica	5
Informatica	5
Azionamenti	5
Basi di dati	5

e sia data la seguente tabella in cui sono evidenziate le preferenze dei professori:

professore	**lunedì**	**martedì**	**mercoledì**	**giovedì**	**venerdì**
Modellistica		x	x	x	
Informatica		x		x	x
Azionamenti	x	x		x	
Basi di dati	x	x		x	

I vincoli del problema sono i seguenti:

- a tutte le materie sono assegnate 5 ore settimanali;
- ogni giorno è possibile assegnare in totale al massimo 4 ore di lezioni;
- non è possibile assegnare più di 2 ore giornaliere della stessa materia.

Il problema consiste nel massimizzare le preferenze dei professori.

Formulazione alternativa

Sia x_{ij} le ore della materia i-esima nel giorno j-esimo.

Il vettore delle incognite è X = x_{ij} con $\begin{cases} i = 1..4 & \text{(modellistica, ..., basi)} \\ j = 1..5 & \text{(lunedì, ..., venerdì)} \end{cases}$

I vincoli del problema sono:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq 4 \quad \text{con j=1..5} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 5 \quad \text{con i=1..4} \\ x_{ij} \leq 2 \quad \text{con} \begin{cases} i = 1..4 \\ j = 1..5 \end{cases} \end{cases}$$

La funzione obiettivo da massimizzare è:

$$fx$$

in cui

$$f = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

La matrice dei vincoli A è riportata di seguito:

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Il vettore dei termini noti è costituito dal numero di ore giornaliere di tutte le materie (vincolo di disuguaglianza), settimanali per la singola materia (vincolo di uguaglianza) e giornaliere per la singola materia (vincolo di disuguaglianza).

Il vettore dei termini noti è il seguente:

$$b = [4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad -5 \quad -5 \quad -5 \quad -5 \quad \underbrace{2 \quad ... \quad 2}_{20}]$$

Conclusioni

Tra i vincoli del problema appare

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 5 \quad \text{con i=1..4} \tag{1}$$

Per utilizzare la funzione **linprog** del `Matlab`, è necessario trasformare ciascun vincolo di uguaglianza nei due vincoli di disuguaglianza corrispondenti, e poi traformare le disuguaglianze di maggioranza in disuguaglianze di minoranza.
Quindi,

$$(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leq 5 \quad \text{con i=1..4} \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \geq 5 \quad \text{con i=1..4} \end{cases} \tag{2}$$

$$(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leq 5 \qquad \text{con i=1..4} \\ \sum_{j=1}^{5} -x_{ij} \leq -5 \qquad \text{con i=1..4} \end{cases}$$

Quando in `Matlab` chiamiamo la function **linprog** dell'`optimization toolbox` dobbiamo passare i corretti argomenti (conformabilità delle matrici); inoltre, il formato dei valori del vettore d'uscita è importante nel caso ci si aspetti come soluzioni del problema dei valori interi. Dalla teoria sappiamo che condizione sufficiente affinché un problema di PL abbia soluzioni intere, è che la matrice A sia TUM. In questo caso, la matrice A è TUM e quindi le soluzioni sono intere. Quello che ci aspettiamo sarà comprovato dalle soluzioni che restituisce **linprog**; infatti, considerando che stiamo trattando come incognite del problema le ore di lezione, è assurdo considerare ore di lezione frazionarie; inoltre, è inaccettabile ottenere soluzioni che siano negative, quindi abbiamo sfruttato la possibilità che offre **linprog** di inserire un `lower bound` e un `upper bound`, in modo da individuare un range accettabile di valori per le

soluzioni.
Nell'ambiente `Matlab`, accedendo all'help di **linprog** appare la seguente schermata che illustra la sintassi da utilizzare:

```
LINPROG     Linear programming.
   X=LINPROG(f,A,b) solves the linear programming problem:
   min f'*x    subject to:   A*x <= b
    x
   X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while additionally
   satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.

   X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB) defines a set of lower and upper
   bounds on the design variables, X, so that the solution is in
   the range LB <= X <= UB.
[..]
```

Nel nostro caso, utilizziamo la seguente sintassi:

```
[X,fval]=linprog(-f,A,b,[],[],lb)
```

in cui

$$\texttt{lb} = [0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

`lb` rappresenta il `lower bound` del nostro range di soluzioni, definita per non poter ottenere soluzioni negative.
Come già accennato precedentemente, la funzione `linprog` prevede come argomento anche un vettore che definisce l'`upper bound` delle soluzioni del nostro problema; quindi, potremmo definire un vettore

$$\texttt{ub} = [2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2]^T$$

ma sarebbe ridondante in quanto il fatto che una singola materia possa svolgere al più due ore di lezione al giorno è una condizione intrinsecamente definita nei vincoli del problema. Un'ultima osservazione sugli argomenti che passiamo a `linprog`: il vettore `f` che definisce la funzione obiettivo è passata col segno negativo poiché a noi interessa massimizzare le preferenze, ma la `function linprog` minimizza la funzione obiettivo; è evidente, quindi, il ruolo del segno meno.
In definitiva, `linprog` ci restituisce il vettore `X` che rappresenta la soluzione del nostro problema; per una più facile interpretazione abbiamo trasformato il vettore `X` nella seguente tabella: Poiché la soluzione reale del nostro problema dev'essere un orario didattico, mettiamo i risultati ottenti in tale forma:

	Lunedì	**Martedì**	**Mercoledì**	**Giovedì**	**Venerdì**
Modellistica	0.0000	0.0000	2.0000	1.0000	2.0000
Informatica	0.0000	1.0000	0.0000	2.0000	2.0000
Azionamenti	2.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
Basi di dati	2.0000	2.0000	1.0000	0.0000	0.0000

	Lunedì	**Martedì**	**Mercoledì**	**Giovedì**	**Venerdì**
1^a ora	Azionamenti	Informatica	Modellistica	Modellistica	Modellistica
2^a ora	Azionamenti	Azionamenti	Modellistica	Informatica	Modellistica
3^a ora	Basi di dati	Basi di dati	Informatica	Informatica	Informatica
4^a ora	Basi di dati	Basi di dati	Basi di dati	Azionamenti	Informatica

È opportuno osservare che le preferenze delle singole materie riguardano il singolo giorno settimanale e non le ore del singolo giorno: per una singola materia noi sappiamo che fare lezione in un giorno è preferibile rispetto ad un altro, ma non sappiamo la preferenza riguardo l'ora di lezione, quindi per la compilazione della tabella dell'orario finale abbiamo utilizzato un criterio autonomo e opinabile, cioè l'ordine con cui le materie compaiono nella tabella assegnataci come dati.

Esercitazione n° 3

Questa esercitazione tratta il modello di Leslie, usato principalemnte in ambito demografico per gestire la dinamica dell'evoluzione di generazioni sovrapposte di una determinata popolazione.
Nella trattazione dell'evoluzione si suddivide la popolazione in classi di età; dal punto di vista insiemistico ciascuna classe costituisce una partizione della popolazione in un generico istante di tempo. Nel nostro problema introduciamo i concetti di **fertilità** e **mortalità** per una classe di individui della popolazione considerata:

fertilità = f	È il contributo delle generazioni precedenti alle generazioni successive in termini di individui
mortalità = 1-m	È indice della popolazione della classe diminuita dei suoi morti

Formulazione del problema

Sia

	$t = 1$	$t = 2$	$\dots$	$t = T$
x_1	$x_1(1)$	$x_1(2)$	$\dots$	$x_1(T)$
x_2	$x_2(1)$	$x_2(2)$	$\dots$	$x_2(T)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$x_n(1)$	$x_n(2)$	$\dots$	$x_n(T)$

$$\text{con} \begin{cases} x_i \text{ con } i = 1..n & \text{rappresenta la partizione della popolazione} \\ \\ x_i(t) \text{ con } i = 1..n \text{ e } t = 1..T & \text{rappresenta l'evoluzione delle classi di età} \\ & \text{nel generico istante di tempo t} \end{cases}$$

Ci interessa conoscere l'evoluzione del sistema nel tempo; il sistema di equazioni che regola la dinamica è il seguente:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1 x_1(t) + \ldots + f_n x_n(t) \\ x_2(t+1) = (1-m_1)x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t+1) = 1 - m_{n_1} x_{n-1}(t) \end{cases}$$

Il sistema in forma matriciale è il seguente:

$$AX(t) = X(t+1)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ (1-m_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (1-m_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & (1-m_{n-1}) & (1-m_n) \end{bmatrix}$$

Nell'evoluzione del sistema vogliamo che la popolazione sopravviva, cioè il comportamento dell'evoluzione a regime non presenti caratteristiche di stabilità asintotica, ma una leggera instabilità nel tempo.
I dati della nostra esercitazione sono i seguenti:

$$\begin{cases} x_0^T = \{10^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} & [\text{kg}] \\ f^T = \{0 \quad 0.8 \quad 1.2 \quad 0.2\} & \text{per trimestre} \\ m^T = \{0.5 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.4\} & \text{per trimestre} \\ \text{Orizzonte temporale T=20 trimestri} \end{cases}$$

La forma matriciale è la seguente:

$$\begin{cases} X(t+1) = AX(t) \\ X(1) = x_0 \end{cases}$$

L'evoluzione del sistema ricavata tramite un programma `Matlab` è la seguente ed è rappresentata nella Figura 3.

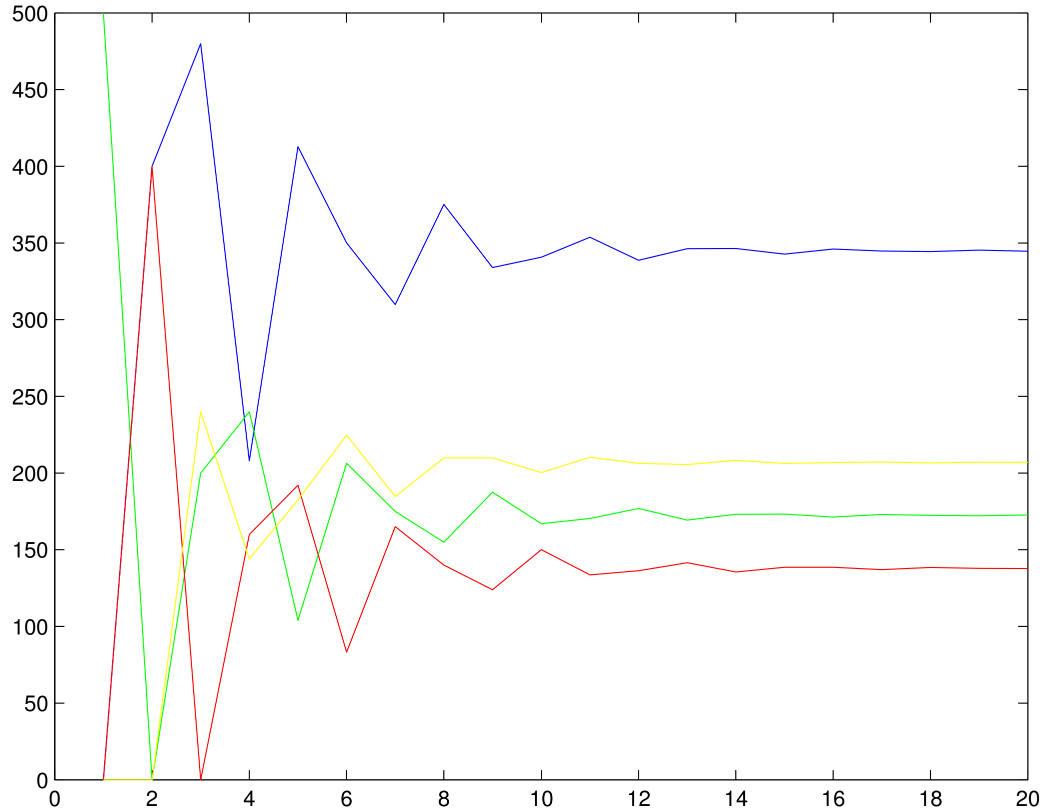
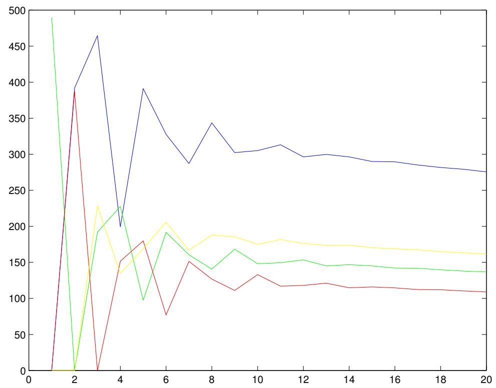


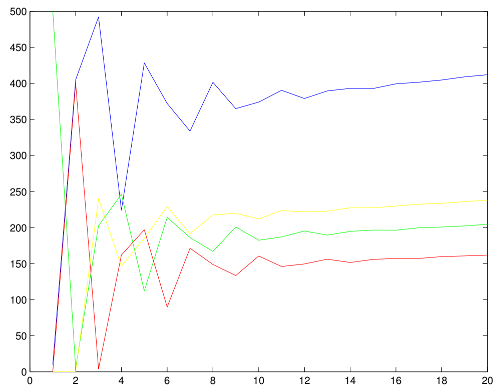
Figura 3: Si riporta nel grafico l'andamento dell'evoluzione della popolazione secondo le specifiche del problema; da notare che da un certo istante temporale l'evoluzione delle singole classi di età presenta comportamento asintotico, cioè piccole oscillazioni attorno ad un valore fisso.

Osserviamo che l'evoluzione del sistema si modifica se modifichiamo i parametri di ingresso, che nel nostro caso sono **mortalità** e **fertilità** delle singole generazioni.
Le seguenti figure mostrano l'andamento dell'evoluzione in caso di perturbazione dei dati iniziali; nello specifico si sono perturbati con un incremento ϵ positivo e piccolo a piacere rispettivamente i vettori rappresentanti **mortalità** e **fertilità**, per ottenere in simulazione l'effetto dell'estinzione e crescita progressiva delle singole classi di età.



(a) La figura mostra l'evoluzione delle singole generazioni dopo aver effettuato una perturbazione del **vettore delle mortalità**; si può notare che le singole evoluzioni tendano ad un valore nullo, sinonimo dell'estinzione della popolazione.

(b) La figura mostra l'evoluzione delle singole generazioni dopo aver effettuato una perturbazione del **vettore della fertilità**; si può notare che le singole evoluzioni presentano andamenti asintotici con pendenza positiva, sinonimo dell'aumento progressivo della popolazione.



Immaginiamo che l'evoluzione appena trovata si riferisca alla popolazione di un acquario, in cui sono presenti 4 classi di età con mortalità e fertilità specificate nei vettori elencati all'inizio; si ipotizza adesso di poter effettuare dei prelievi trimestrali suddivisi per singole classi di età.
La matrice di Leslie del sistema è:

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ (1-m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1-m_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (1-m_{n-1}) & (1-m_n) \end{bmatrix}$$

di cui riproponiamo i dati del problema:

$$\begin{cases} x_0^T = \{10^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} & \text{[kg]} \\ f^T = \{0 \quad 0.8 \quad 1.2 \quad 0.2\} & \text{per trimestre} \\ m^T = \{0.5 \quad 2 \quad 0.4 \quad 0.4\} & \text{per trimestre} \\ \text{Orizzonte temporale T=20 trimestri} \end{cases}$$

Il vettore dei prelievi al generico istante t è il seguente:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} i = 1..n & \text{(classi di età)} \\ t = 1..T & \text{(istante)} \end{cases}$$

Scelgo le variabili di controllo e ipotizzo di avere un mercato con dei prezzi:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Ragionando su tutti i periodi troviamo un'espressione per i ricavi attualizzati:

$$\begin{cases} r = \dfrac{0.035}{4} = \dfrac{\text{tasso di interessa annuale}}{\text{n° di trimestri in un anno}} \\ R = \dfrac{P^T u(1)}{1+r} + \dfrac{P^T u(2)}{(1+r)^2} + \ldots + \dfrac{P^T u(T)}{(1+r)^T} \end{cases}$$

Con tali considerazioni il problema diventa il seguente:

$$\begin{cases} \hat{J} = \max\limits_{u(t)} J \\ J = \sum\limits_{i=1}^{T} \Pi_t^T u(t) & \text{con } \Pi_t = (1+r)^{-t} p \\ x(t+1) = A[x(t) - u(t)] \\ 0 \le u(t) \le x(t) \\ x(1) \quad \text{noto} \end{cases}$$

Potremmo tentare di risolvere tale problema tramite la PL, ma otterremmo una *soluzione statica*, cioè a catena aperta nel senso che se in qualche istante intervenisse un disturbo, avremmo un errore maggiore di quello che otterremmo risolvendo il problema con la PD. Tralasciando molti passaggi utilizzati nella risoluzione del problema tramite la PD, menzioniamo i punti fondamentali:

- utilizziamo l'ipotesi induttiva che il ricavo rimanente ad ogni stadio sia proporzionale alla quantità nel medesimo stadio secondo un coefficiente vettoriale di proporzionalità, cioè che la $\hat{J}_t$ sia lineare nello stato:

$$\hat{J}_t = s_t^T x(t) \qquad \text{per } t = 1..T$$

- utilizziamo l'equazione di Bellman, che alla luce dell'ipotesi induttiva diventa:

$$\hat{J}_t \overset{\substack{\text{eq. di}\\\text{Bellman}\\\downarrow}}{=} \max_{0\le u(t)\le x(t)} [\Pi_t^T u(t) + \underbrace{s_{t+1}^T x(t+1)}_{\hat{J}_{t+1}}] =$$

$$= \max_{0\le u(t)\le x(t)} \left[\Pi_t^T u(t) + s_{t+1}^T A[x(t)-u(t)]\right] \overset{\substack{\text{per ipotesi}\\\text{induttiva}\\\downarrow}}{=} s_t^T x(t)$$

Sviluppando i calcoli arriviamo alla seguente formula della funzione ricavi rimanenti:

$$\hat{J}_t = \max_{0\le u(t)\le x(t)} \left[(\Pi_t^T - s_{t+1}^T A)u(t) + s_{t+1}^T A x(t)\right]$$

Massimizzando rispetto alla u(t) troviamo la seguente espressione:

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{se } \Pi_t^T + s_{t+1}^T A > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per risolvere l'indecisione sull'assegnazione di $\hat{u}_i(t)$ abbiamo necessità di conoscere ad ogni istante il valore del vettore $s_(^T t+1)$, che troviamo tramite la risoluzione di una equazione ricorsiva con condizione finale:

$$\begin{cases} s_t^T = [\Pi_t^T - s_{t+1}^T A]^+ + s_{t+1}^T A \\ s_T^T = \Pi_T^T \end{cases}$$

Notiamo che è un'equazione analoga a quella di *Riccati*, nel senso che rappresenta la forma algebrica dell'equazione di Bellman nell'ipotesi induttiva, precedentemente riportata, che la funzione ricavo rimanente sia lineare nello stato.
Tramite la simulazione in ambiente `Matlab` del sistema otteniamo i seguenti risultati:

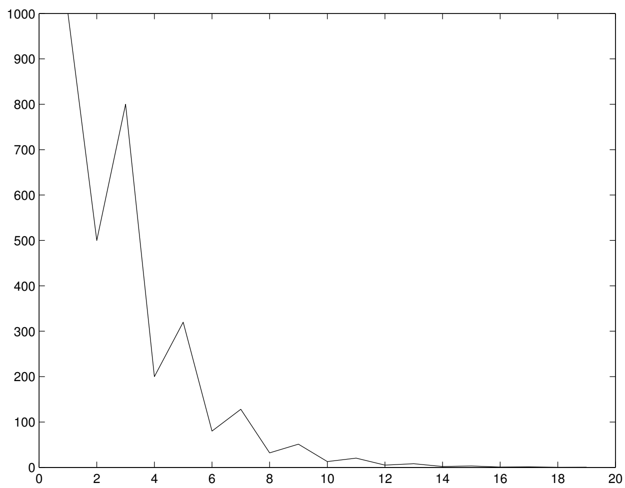
t	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1000	0	0	0
2	0	500	0	0
3	400	0	400	0
4	480	200	0	240
5	160	240	160	0
6	384	80	192	96
7	294	192	64	115
8	230	147	154	38
9	302	115	118	92
10	234	151	92	71
11	231	117	121	55
12	238	116	93	72
13	205	119	93	56
14	206	102	95	56
15	196	103	82	57
16	181	98	83	49
17	178	90	79	50
18	167	89	72	47
19	71	83	71	0
20	67	36	67	0

Tabella 3: Andamento delle singole generazioni

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$u_4(t)$
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	240
5	0	0	0	0
6	0	0	0	96
7	0	0	0	115
8	0	0	0	38.4
9	0	0	0	92
10	0	0	0	71
11	0	0	0	55
12	0	0	0	72.5
13	0	0	0	56
14	0	0	0	56
15	0	0	0	57
16	0	0	0	49
17	0	0	0	50
18	0	0	72	47
19	0	0	71	0
20	67	36	67	0

Tabella 4: Andamento dei prelievi

t	quantità totale
1	1000
2	500
3	800
4	920
5	560
6	752
7	665.6
8	569.6
9	627.2
10	547.3
11	524.3
12	520
13	472.4
14	459.7
15	438.6
16	410.6
17	396.1
18	374.8
19	225.3
20	168.7
21	0



A sinistra riportiamo in forma tabellare le quantità totali per ogni istante di tempo, cioè per ogni istante considero la somma di tutte le classi di età ottenendo una misura significativa della merce di cui si dispone; nella figura qui sopra è riportato l'andamento di tale grandezza.

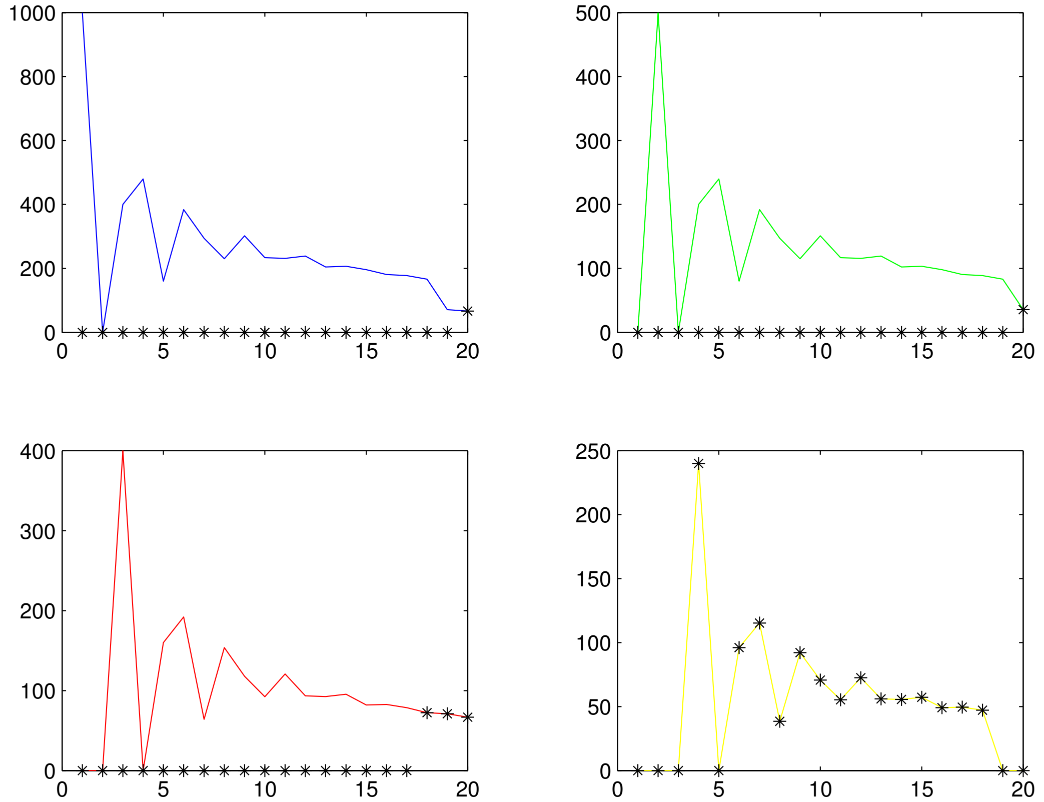


Figura 4: Il grafico mostra separatamente l'andamento temporale delle singole generazioni della popolazione, sottolineando l'andamento dei prelievi evidenziandoli ognuno con $*$.

t	$X_i(t) = U_i(t)$			
1	-	•	•	•
2	•	-	•	•
3	-	•	-	•
4	-	-	•	•
5	-	-	-	•
6	-	-	-	•
7	-	-	-	•
8	-	-	-	•
9	-	-	-	•
10	-	-	-	•
11	-	-	-	•
12	-	-	-	•
13	-	-	-	•
14	-	-	-	•
15	-	-	-	•
16	-	-	-	•
17	-	-	-	•
18	-	-	•	•
19	-	-	•	•
20	•	•	•	•

Si evincono le seguenti conclusioni:

- per i primi tre periodi non effettuo prelievi per non perturbare il sostentamento del sistema;
- nell'ultimo periodo prelievo tutti gli elementi di ciascuna classe per non rimanere con elementi invenduti;
- nei prelievi intermedi noto che prelevo sempre tutti gli elementi dell'ultima classe poiché hanno fertilità molto bassa e mortalità alta; per tale motivo se non li prelevassi il comportamento sarebbe antieconomico.