Università degli studi di L'Aquila

Problemi
di
Modellistica e Simulazione

Mariano Spadaccini

21 febbraio 2004

Indice

Copyright

Introduzione

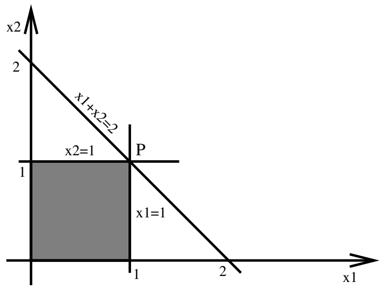
Questo documento è parte integrante dell'esame di *Modellistica e Simulazione*, del corso di laurea di *Ingegneria Elettronica v.o.* della facoltà di Ingegneria de L'Aquila presso Monteluco di Roio, prodotto nell'a.a. 2003-2004.

Problema n° 1 - 15/10/2003

Testo del problema

Verifichiamo che siamo in un caso degenere perché c'è un vincolo che è ridondante.

$$\text{F.C.} \quad \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$



Soluzione

Per trovare i vertici passo dalla FC alla FS ed introduco le variabili *slack*.

$$\text{F.S.} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0 \\ \text{con } i = 1..N \text{ in cui } N = 5 \end{cases} \qquad \text{m} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Adesso vediamo quanto vale il numero di basi che posso trovare:

$$\#Basi \leq \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Adesso possiamo trovare tutti i vertici del politopo. Le basi che ottengo sono quelle per le colonne:

1-2-3	1-2-4	1-2-5	2-4-5	2-3-4
2-3-5	3-4-5	1-3-4	1-3-5	1-4-5

$\boxed{\text{1-2-3}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{1-2-4}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{1-2-5}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{2-4-5}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \text{4 riga + 5 riga = 2 riga} \rightarrow \text{sono dipendenti} \rightarrow \text{2-4-5 non è base}$$

$\boxed{\text{2-3-4}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{NON AMMISSIBILE}$$

$\boxed{\text{2-3-5}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{3-4-5}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{1-3-4}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \text{-}1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \text{-}1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{NON AMMISSIBILE}$$

$\boxed{\text{1-3-5}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \quad \text{3 riga} + \text{5 riga} = \text{1 riga} \rightarrow \text{sono dipendenti} \rightarrow \text{1-3-5 non è base}$$

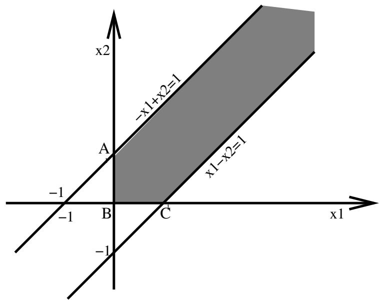
$\boxed{\text{1-4-5}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{-}1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Problema n° 2 - 15/10/2003

Trovare i vertici di:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Introduco le variabili *slack*:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \ge 0 \\ \text{con } i = 1..N \text{ in cui } N = 4 \end{cases}$$

$$m\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se # di basi è $\binom{N}{m} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$

Le basi che ottengo sono quelle per le colonne:

$\boxed{\text{1-2}}$ $\boxed{\text{1-3}}$ $\boxed{\text{1-4}}$ $\boxed{\text{2-3}}$ $\boxed{\text{2-4}}$ $\boxed{\text{3-4}}$

$\boxed{\text{1-2}}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ la 1^a colonna e la 2^a sono dipendenti $\longrightarrow$ 1-2 non è base

$\boxed{\text{1-3}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ NON AMMISSIBILE

1-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2-3

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2-4

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{NON AMMISSIBILE}$$

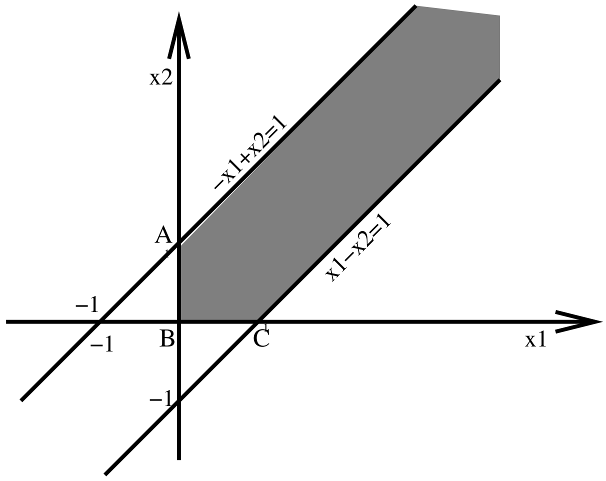
3-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Riassumendo in tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
1-2	singolarità				
1-3	-1	0	0	2	non ammissibile
1-4	1	0	0	2	C
2-3	0	1	2	0	A
2-4	0	-1	0	2	non ammissibile
3-4	0	0	1	1	B

in cui si ripropone il disegno del dominio:



Problema n$^\circ$ 3 - 15/10/2003 Problema dei trasporti

$$O = \sum_{i}^{m} o_i \quad \longrightarrow \quad \text{offerta complessiva}$$

$$D = \sum_{j}^{n} d_j \quad \longrightarrow \quad \text{domanda complessiva}$$

Se $D \leq 0 \quad \longrightarrow \quad$ problema *ammissibile*
Se $D = 0 \quad \longrightarrow \quad$ problema *bilanciato*

Devo dimostrare che ogni problema *ammissibile* ha come soluzione la stessa di un opportuno problema *bilanciato*.

Dimostrazione
$D < 0 \quad \longrightarrow \quad$ problema ammissibile
Introduco un *nodo destinazione* fittizio a cui associo archi entranti di peso nullo; inoltre associo a tali flussi un costo nullo ($c_{i,m+1} = 0$).
Nel nodo $m+1$ ho la domanda d_{m+1} rappresentata dalla quantità $O - D$, cioè introduco il nodo al solo scopo di ottenere $O = D$ poiché avendo costi nulli non modifico la funzione obiettivo; quindi se risolvo il problema *ammissibile* che è sbilanciato risolvo anche il problema bilanciato aggiungendo un nodo fittizio.

Problema n° 4 - 18/10/2003

Sia A$\sim m \times n$ $\quad rank(A) = m < n$.
Considera:

$$\min_{x,\epsilon} ||\epsilon||_p$$
$$\epsilon \in \mathbb{R}^m, \quad x \in S = \{x : Ax - b = \epsilon\}$$

Per $p = 2$, questo è il problema dei minimi quadrati.
Dimostrare che

$$\min_{x,\epsilon} ||\epsilon||_\infty$$
$$\epsilon \in \mathbb{R}^n, \quad x \in S$$

è un problema di PL e ridurlo in FC.

Suggerimento Ricorda che:

$$||\epsilon||_\infty = \lim_{p \longrightarrow \infty} ||\epsilon||_p = \lim_{p \longrightarrow \infty} \big(\sum_{i=1}^{m} |\epsilon_i|^p \big)^{1/p} = \max_i |\epsilon_i|$$

Svolgimento Osserviamo che ϵ è un vettore con:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

Se faccio

$$\max_i |\epsilon_i|$$

ho il problema di esprimere il *max* in R^3.

Allora considero un intervallo $[-a, a]$ simmetrico rispetto l'origine e lo restringo fino a toccare la più grande componenete e_i, cioè

$$\max_i |\epsilon_i| = \max_{-a \le \epsilon_i \le a} \{a\}$$

Appena trovo il più grande $|\epsilon_i|$, trovo il più piccolo intervallo $[-a, a]$ che contiene tutte le componenti di ϵ.
Allora il problema totale diventa:

$$\begin{aligned} \min_{*}(\min a) = \min_{*}\{a\} = \\ = -[\max_{**}(-a)] \quad \text{in forma canonica} \end{aligned}$$

in cui:

$$* = \begin{cases} x, \epsilon \\ -a \leq \epsilon_i \leq a \\ Ax - b = \epsilon \end{cases} \qquad ** = \begin{cases} x, \epsilon \\ Ax \leq \epsilon + b \\ -Ax \leq -\epsilon - b \\ -a \leq \epsilon_i \leq a \end{cases}$$

Problema n° 5 - 21/10/2003 Problema del taglio

Dati

- rotolo largo 16ft e lunghezza infinita
- si riceve il seguente ordine:
  - 200 rotoli larghi 3ft;
  - 50 rotoli larghi 4ft;
  - 150 rotoli larghi 5ft;

Voglio minimizzare il numero di rotoli larghi 16ft da utilizzare per soddisfare l'ordine.

Svolgimento

Sia

n = numero di tagli di larghezza 3ft;

m = numero di tagli di larghezza 4ft;

l = numero di tagli di larghezza 5ft.

Quindi, n, m e l sono numeri interi; le limitazioni su m, n e l sono:

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq 5 \\ 0 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq l \leq 3 \end{cases}$$

Inoltre, limite superiore ed inferiore per la somma dei tagli sono:

$$\begin{cases} 3n + 4m + 5l \leq 16 \\ 14 \leq 3n + 4m + 5l \end{cases}$$

Per la risoluzione del mio problema genero una matrice in `Matlab` in cui conservo tutte le possibili terne (n, m, l) che posso ottenere (eliminando però tutte le terne (n, m, l) che non hanno significato), evidenziando nelle prime 3 colonne la terna $(n.m.l)$, e nell'ultima lo scarto che ottengo, cioè $(16 - k)$, in cui $k = 3n + 4m + 5l$.

Tramite il codice `Matlab` seguente:

```
TAB=[];
for n=0:5
  for m=0:4
    for l=0:3
      k=3*n+4*m+5*l;
      if k<=16 & k>=14
        TAB=[TAB; [n,m,l,16-k]];
      end
    end
  end
end
```

ottengo:

$$TAB = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Il problema in esame è un problema di PL ed abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} min f^T X \\ AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

La funzione `Matlab` che utilizziamo per la risoluzione del sistema è la seguente:

```
X=LINPROG(f,A,b) solves the linear programming problem:

        min f'*x    subject to:   A*x <= b
         x
```

Nel nostro caso i vincoli sono disequazioni del tipo $\geq$, quindi devo adattarle alla sintassi della funzione citata e, quindi, il sistema dev'essere trasformato nel seguente:

$$\begin{cases} min f^T X \\ -AX \leq -B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

in cui:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 200 \end{bmatrix} \qquad f^T = \begin{bmatrix} \underbrace{1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1}_{\text{colonne di A}} \end{bmatrix}$$

Ottengo la soluzione:

$$X = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 2.7106 \\ 13.3288 \\ 0.0000 \\ 68.3356 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 12.5000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Si evidenzia che pensare di perturbare la funzione obiettivo per ottenere soluzioni intere (vedi pagina 15) non ha senso poiché la matrice A non è TUM.

Problema n° 6 - 23/10/2003 Turni in ospedale

Dati

Un ospedale lavora su 6 turni di 4 ore ciascuno; i requisiti minimi di presenza medica sono riassunti nella tabella seguente.

turno	orario	n° medici
1°	0-4	4
2°	4-8	7
3°	8-12	9
4°	12-16	12
5°	16-20	8
6°	20-24	6

Ipotizziamo che ogni medico può entrare solo all'inizio di un turno e resta in servizio 8 ore consecutive; il problema è conoscere il numero minimo di medici che deve assumere l'ospedale per soddisfare i requisiti minimi di presenza. Ogni medico può entrare solo all'inizio di un turno e resta in servizio 8 ore consecutive; il problema è conoscere il numero minimo di medici che deve assumere l'ospedale per soddisfare i requisiti minimi di presenza

Svolgimento

Sia

x_i numero di medici che inizia a lavorare nel turno i.

I vincoli sul numero minimo di medici per turno è:

$$\begin{cases} x_1 + x_6 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 9 \\ x_3 + x_4 \geq 12 \\ x_4 + x_5 \geq 8 \\ x_5 + x_6 \geq 6 \end{cases}$$

Il problema di PL è il seguente:

$$\begin{cases} min \sum_{i=1}^{6} x_i = min f^T X \\ AX \geq B \end{cases}$$

in cui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad f^T = \Big[\underbrace{1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1}_{\text{colonne di A}}\Big]$$

La funzione `Matlab` che utilizziamo per la risoluzione del sistema è la seguente:

```
X=LINPROG(f,A,b) solves the linear programming problem:

           min f'*x    subject to:   A*x <= b
            x
```

Nel nostro caso dobbiamo minimizzare il numero di medici, ma i vincoli sono disequazioni del tipo $\geq$, quindi devo adattarle alla sintassi della funzione citata e, quindi, il sistema dev'essere trasformato nel seguente:

$$\begin{cases} min \sum_{i=1}^{6} x_i = min f^T X \\ -AX \leq -B \end{cases}$$

I parametri che passiamo alla funzione `linprog` sono i seguenti:

```
linprog(f,-A,-B,[],[],lb)
```

in cui $lb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ rappresenta il lower bound del dominio delle soluzioni.

La funzione restituisce i seguenti valori:

$$X = \begin{bmatrix} 2.8195 \\ 4.1805 \\ 6.2315 \\ 5.7685 \\ 3.4541 \\ 2.5459 \end{bmatrix}$$

Notiamo che vorremmo ottenere delle soluzioni intere poiché ciascuna componente del vettore delle soluzioni rappresenta il numero di medici impiegati tra due turni consecutivi; poiché la matrice A è TUM, possiamo ottenere valori interi perturbando la funzione obiettivo attraverso queste semplici linee di codice:

```
Perturb=[rand(1,6)]*0.001;
f=f+Perturb;
```

ottenendo così i seguenti valori:

$$X_{1,int} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 5.00 \\ 4.00 \\ 8.00 \\ 0.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

Perturbando nel verso opposto otteniamo l'altro vertice del politopo che è ugualmente soluzione accettabile per il nostro problema:

```
Perturb=[rand(1,6)]*0.001;
f=f-Perturb;
```

ottenendo così i seguenti valori:

$$X_{2,int} = \begin{bmatrix} 7.00 \\ 0.00 \\ 10.00 \\ 2.00 \\ 6.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

È evidente che il turno con maggiore presenza di medici è il 4° poiché è quello in cui si richiede un requisito di presenza maggiore rispetto gli altri.

Si richiedeva successivamente la risoluzione del problema duale, in cui:

$$PRIMALE \qquad \begin{cases} min \sum_{i=1}^{6} x_i = min f^T X \\ -AX \leq -B \end{cases}$$

$$DUALE \qquad \begin{cases} max \sum_{i=1}^{6} y_i = max - B^T X \\ -A^T Y \geq f^T \end{cases}$$

Risolvendo il duale tramite la già citata funzione `linprog`, otteniamo i seguenti risultati:

$$Y_{int} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

L'interpretazione di ciascuna riga è la seguente: il numero di medici di cui dobbiamo incrementare ciascun turno quando la rispettiva componente della matrice dei termini noti del primale è perturbata di una unità; infatti, secondo la teoria le variabili duali ci danno una stima della sensibilità del problema primale alla perturbazione dei vincoli.

Problema n° 7 - 4/11/2003

Minimizzare la seguente funzione:

$$\begin{cases} minJ = \hat{J} \\ J = (x_0 + u_0)^2 + (x_1 + u_1)^2 + x_2^2 \\ x_1 = x_0 - u_0 \\ x_2 = 2x_1 + u_1 \\ x_0 \text{ è noto} \end{cases}$$

$\boxed{\text{tradizionale}}$

$$\min_{u_0,u_1}\{x_0^2 + u_0^2 + 2x_0u_0 + x_1^2 + u_1^2 + 2x_1u_1 + x_2^2\} =$$
$$= min_{u_0,u_1}\{(x_0 - u_0)^2 + (x_0 - u_0 + u_1)^2 + (2x_0 - 2u_0 + u_1)^2\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial u_0} = -2(x_0 - u_0) - 2(x_0 - u_0 + u_1) - 4(2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial u_1} = 2(x_0 - u_0 + u_1) + 2(2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(x_0 - u_0) - 2(x_0 - u_0 + u_1) = 0 \\ 2(x_0 - u_0 + u_1) + 2(2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 - u_0 + (2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \\ x_0 - u_0 + u_1 + (2x_0 - 2u_0 + u_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = 0 \\ x_0 = \hat{u}_0 \end{cases}$$

x_0 arbitrario $\longrightarrow$ $\hat{u}_0$ arbitrario

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = 0 \\ \hat{u}_0 = x_0 \text{ arbitrario} \\ x_1 = x_0 - u_0 \text{ arbitrario} \\ x_2 = 2x_1 + 0 = 2x_1 \text{ arbitrario} \end{cases}$$

$\boxed{\text{P.D.}}$

$$\min\{\underbrace{x_0^2+u_0^2-2x_0u_0}_{t=0}+\underbrace{x_1^2+u_1^2+2x_1u_1}_{t=1}+\underbrace{x_2^2}_{t=2}\}$$

$$J_2 = x_2^2 = \hat{J}_2$$

$$\hat{J}_1 = \min_{u_1}\{(x_1+u_1)^2+\hat{J}_2\} =$$
$$= \min_{u_1}\{(x_1+u_1)^2+x_2^2\} =$$
$$= \min_{u_1}\{(x_1+u_1)^2+(2x_1+u_1)^2\}$$

$$2(x_1+u_1)+2(2x_1+u_1)=0$$

$$\boxed{\hat{u}_1 = -\tfrac{3}{2}x_1}$$

$$J_1 = (x_1-\frac{3}{2}x_1)^2+(2x_1-\frac{3}{2}x_1)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1^2$$
$$\hat{J}_0 = \min_{u_0}\{(x_0+u_0)^2+\hat{J}_1\} =$$
$$= \min_{u_0}\{(x_0+u_0)^2+\frac{1}{2}x_1^2\} =$$
$$= \min_{u_0}\{(x_0+u_0)^2+\frac{1}{2}(x_0-u_0)^2\}$$

$$2(x_0+u_0)-(x_0+u_0)=0$$

$$\boxed{\hat{u}_0 = -\tfrac{1}{3}x_0}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = -\dfrac{1}{3}x_0 \\ \hat{u}_1 = -\dfrac{3}{2}x_1 \\ x_1 = x_0-u_0 = x_0+\dfrac{1}{3}x_0 = \dfrac{4}{3}x_0 \\ x_2 = 2x_1+u_1 = 2(\dfrac{2}{3}x_0)+(-\dfrac{3}{2}x_1) = \\ \quad = 2(\dfrac{4}{3}x_0)+[-\dfrac{3}{2}(\dfrac{4}{3}x_0)] = \dfrac{2}{3}x_0 \end{cases}$$

Problema n° 8 - 12/11/2003 Drift esogeno

d_t è un disturbo costante di cui conosco il valore esatto ad ogni istante t, quindi in realtà è un dato del problema con:

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t \\ y_t = Cx_t \end{cases}$$

Tramite un'opportuna trasformazione di variabili devo ricondurre il problema ad un problema di inseguimento di traiettoria o *traking*. Considero:

$$\begin{cases} J = ||e||^2 + ||u||_R^2 \\ \hat{J} = \min J = \min \left\{||e||^2 + ||u||_R^2\right\} \end{cases}$$

con $\begin{cases} y_d = 0 \\ y = e \end{cases}$

Risolvo il problema in tre parti:

1. costo rimanente all'ultimo stadio
   $t = T$
   $\hat{J}_T = x_T^T \underbrace{C^T C}_{Q_T} x_T = \hat{J}_T(x_T)$
   Allora
   $\hat{J}_T = x_T^T Q_T x_T = \hat{J}_T(x_T)$

2. ipotesi induttiva

   $\hat{J}_t = \frac{1}{2} x_t^T s_t x_t + p_t x_t + q_t$ con $\begin{cases} s_T = Q_t \\ p_T = 0 \\ q_T = 0 \end{cases}$

3. equazione di Bellman

$$
\begin{aligned}
\hat{J}_t &= \min \left\{ w_t + \hat{J}_{t+1} \right\} = \\
&= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2} x_t^T Q_t x_t + \frac{1}{2} u_t^T p_t u_t + \underbrace{x_{t+1}^T s_{t+1} x_{t+1} + p_{t+1} x_{t+1} + q_{t+1}}_{\hat{J}_{t+1}} \right\}
\end{aligned}
$$

poiché so che $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + d_t$

$$
\begin{aligned}
&= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2} x_t^T [Q_t + A^T s_{t+1} A] x_t + \frac{1}{2} u_t^T [R + B^T s_{t+1} B] u_t + \right. \\
&\quad + u_t^T [B^T s_{t+1} A x_t + \underbrace{x_t^T A^T s_{t+1} d_t + p_{t+1} A x_t}_{costante} + \\
&\quad \left. + \underbrace{u_t^T B^T s_{t+1} d_t + p_{t+1} B u_t}_{costante} + + \underbrace{d_t^2 s_{t+1} + p_{t+1} d_t}_{costante} \right\} \\
&= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2} x_t^T [Q_t + A^T s_{t+1} A] x_t + \frac{1}{2} u_t^T [R + B^T s_{t+1} B] u_t + \right. \\
&\quad + u_t^T [B^T s_{t+1} A x_t + [d_t s_{t+1} A + p_{t+1} A] x_t + \\
&\quad + [d_t s_{t+1}^T B + p_{t+1} B] u_T + d_t^2 s_{t+1} + p_{t+1} d_t
\end{aligned}
$$

e minimizzando rispetto ad u_t

$$
[R + B^T s_{t+1} B] u_t + [B^T s_{t+1} A] x_t + B s_{t+1}^T d_t + p_{t+1} B = 0
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_t &= -[R + B^T s_{t+1} B]^{-1} \left\{ [B^T s_{t+1} A] x_t + B s_{t+1}^T d_t + p_{t+1} B \right\} \\
&= -[R + B^T s_{t+1} B]^{-1} B^T [s_{t+1} A x_t + \underbrace{s_{t+1} d_t + p_{t+1}}_{\text{è la vecchia } s_{t+1}}]
\end{aligned}
$$